

# Mathematics



## חוברת סיכום קורס

### חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – קורס ראשון

#### תוכן עניינים

5.....	הקדמה
6.....	פונקציות
6.....	תכונות והגדרות יסוד
8.....	גבולות
8.....	הגדרת הגבול
9.....	משפט הסנדביץ'
9.....	גבולות חד-צדדיים
10.....	אריתמטיקה
10.....	היינה – הקשר בין סדרות לפונקציות
11.....	רציפות
11.....	הגדרת הרציפות
11.....	רציפות משמאל לנקודה
11.....	משפט הרציפות
12.....	מיון נקודות אי-רציפות
12.....	סליקה
12.....	קפיצה
12.....	עיקרית
13.....	משפטי רציפות יסודיים
13.....	משפט ערך הביניים
13.....	משפט ערך הביניים המוכלל
13.....	משפט ווירשטראס
14.....	גזירות
14.....	הגדרת הגזירות
14.....	משפט – גזירות גוררת רציפות
14.....	כלל השרשרת

- 15.....נגזרת של פונקציה הפוכה
- 15.....נגזרות חד-צדדיות
- 15.....נגזרת ימנית
- 15.....נגזרת שמאלית
- 15.....משפט – שיוויון נגזרות חד-צדדיות
- 16.....כללי גזירה
- 16.....נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות
- 17.....**כלל לופיטל**
- 17.....משפט לופיטל (ניסוח עבור מקרה "0/0")
- 18.....**משפטים יסודיים**
- 18.....משפט פרמה
- 18.....משפט דרבו
- 18.....משפט רול
- 18.....משפט לגרנז'
- 18.....משפט קושי (הכללה ללגרנז')
- 19.....**טור טיילור**
- 19.....משפט נוסחת טיילור
- 19.....מקרה פרטי  $n=0$  – משפט לגרנז'
- 19.....משפט יחידות הטור
- 20.....טור טיילור – מקלורן
- 20.....פיתוחים סטנדרטיים לטור מקלורן
- 21.....זוגיות טור מקלורן
- 22.....**חקירת פונקציה**
- 22.....נקודות קיצון מקומיות
- 22.....נקודת מקסימום מקומית
- 22.....נקודת מינימום מקומית
- 22.....משפט – התאפסות הנגזרת בנקודת קיצון מקומית
- 22.....נקודת קיצון גלובלית
- 22.....נקודת מקסימום גלובלית
- 22.....נקודת מינימום גלובלית
- 23.....תנאים לנקודת קיצון
- 23.....נקודה חשודה לקיצון (מקסימום או מינימום מקומי)
- 23.....משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת הראשונה
- 23.....משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת השנייה
- 23.....משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת ה- $n$ -ית

24.....	תחומי קמירות וקעירות.....
24.....	קמירות.....
24.....	קעירות.....
24.....	מבחן הנגזרת השנייה לקמירות וקעירות.....
24.....	נקודת פיתול.....
25.....	אסימפטוטות.....
25.....	הגדרה – אסימפטוטה משופעת.....
25.....	הגדרה – אסימפטוטה אנכית.....
26.....	<b>סדרות</b> .....
26.....	הגדרות יסוד בסדרות.....
27.....	מבוא לתורת הקבוצות.....
28.....	סדרות רקורסיביות.....
28.....	תתי-סדרות.....
28.....	קריטריון קושי'.....
29.....	משפטי יסוד בסדרות.....
29.....	אריתמטיקה של סדרות.....
29.....	הרחבת האריתמטיקה.....
30.....	אי-שיוויונות בין סדרות.....
31.....	מנה ושורש של סדרה.....
32.....	מונוטוניות וחסיומות.....
33.....	משפטי יסוד בתתי-סדרות.....
34.....	קריטריון קושי'.....
35.....	הגבול המפורסם e בסדרות.....
35.....	הגבול המפורסם סינוס בסדרות.....
36.....	<b>האינטגרל הלא מסוים</b> .....
36.....	משפטי אינטגרביליות.....
37.....	משפט הערך הממוצע האינטגרלי'.....
38.....	<b>האינטגרל המסוים</b> .....
38.....	המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי'.....
38.....	נוסחת ניוטון-לייבניץ.....
38.....	הכלל לכלל לייבניץ.....
39.....	<b>אינטגרלים מוכללים</b> .....
39.....	מבחני השוואה.....
39.....	מבחן ההשוואה הראשון.....
39.....	מבחן ההשוואה השני (גבולי).....

- 40..... התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
- 40..... התכנסות בהחלט – הגדרה
- 40..... התכנסות בתנאי – הגדרה
- 40..... משפט – התכנסות מוחלטת גוררת התכנסות
- 41..... אינטגרלים מוכללים נפוצים
- 41..... אינטגרלים מהסוג הראשון
- 41..... אינטגרלים מהסוג השני
- 42..... שלבי עבודה עם אינטגרלים מוכללים

## הקדמה

שלום,

לפניכם חוברת הניתנת לכל מי שצופה בקורס עם חן הררי באתר סטאדיס [www.Studies.co.il](http://www.Studies.co.il).  
נא קראו בעיון את הדברים הבאים לפני שאתם מתחילים לעבוד עם החוברת.

### איך לעבוד נכון עם חוברת סיכום קורס?

1) יש הבדל מהותי בין סיכום שלכם לבין סיכום של מישהו אחר – סיכום שלנו תמיד נקלט הרבה יותר טוב בראש שלנו מאשר סיכום של מישהו אחר, ולכן כדי שהסיכום הזה יקלט טוב, אני מציע לכם בחום לעבוד לפי עקרון מוביל אחד וחשוב: להפוך את הסיכום הזה – לשלכם.

אז איך עושים את זה? באופן הבא:

**מדגישים**, **מקיפים**, **ממרקרים**, **ממלבנים**, כותבים הערות קטנות בצד וכד'.

זה אומר באופן מפורש ש-  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

וגם כותבים ממש על גבי הנוסחאות עצמן כמו למשל כך:  $|f(x) - L| < \varepsilon$

ובקיצור עושים כל מה שצריך כדי להפוך את הסיכום הזה לשלכם.

2) אחד המפתחות להצלחה בקורס הזה הוא: **לשנן, לשנן ואז עוד קצת לשנן**. לפעמים שואלים אותי – חן, מה אנחנו בשיעור היסטוריה? מה לשנן, זו מתמטיקה! אז אני תמיד עונה: "המתמטיקה בנויה על שלוש רגליים – **הבנה, תרגול ושינון**" (ולא ניתן להתחמק מהרגל השלישית!).

בקורס אנחנו עובדים על שני החלקים הראשונים: הבנה ותרגול.

שינון – זה עליכם. והחוברת הזאת נועדה בדיוק בשביל זה. השינון נועד לתת לכם רצף מחשבתי כדי שתוכלו לנסח דרך פתרון קוהרנטית טבעית ורציפה ללא צורך לעבור דרך חיפוש נוסחה כזאת או אחרת בדף הנוסחאות. משננים ואז הכל נמצא בראש שלנו ויכול להישלף מהזיכרון בקלות בשעת מבחן.

בהצלחה!

## פונקציות

### תכונות והגדרות יסוד

#### הגדרת הפונקציה

נתונות שתי קבוצות  $D, E$ . פונקציה היא כלל המתאים לכל איבר מ- $D$  איבר יחיד מ- $E$ .

סימון:  $f : D \rightarrow E$  או  $D \xrightarrow{f} E$

#### פונקציה מונוטונית

$f$  מונוטונית עולה אם לכל  $x_1, x_2 \in D$ ,  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

#### פונקציה חסומה

$f$  חסומה אם קיים מספר  $M$  כך שלכל  $x \in D$ ,  $|f(x)| \leq M$

#### פונקציה זוגית ואי-זוגית

$f$  נקראת זוגית אם לכל  $x \in D$ ,  $f(-x) = f(x)$

$f$  נקראת אי-זוגית אם לכל  $x \in D$ ,  $f(-x) = -f(x)$

#### פונקציה מחזורית

$f$  נקראת מחזורית אם לכל  $x \in D$  קיים  $T$  כך ש- $f(x+T) = f(x)$

**פונקציה חד-חד-ערכית**

$x_2 \neq x_1 \Rightarrow f(x_2) \neq f(x_1) : x_1, x_2 \in D$  נקראת חח"ע אם לכל

או באופן שקול אם:  $f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_2 = x_1$

במילים:  $f$  נקראת חד-חד-ערכית אם לכל ערך  $y$  יש לכל היותר ערך אחד של  $x$ .

**משפט**:  $f$  מונוטונית עולה ממש  $\Leftrightarrow f$  חח"ע

**פונקציה על**

תהי  $f$  פונקציה בתחום  $D$  וטווח  $E$ .

הפונקציה נקראת על אם לכל  $y \in E$  קיים  $x \in D$  כך ש-  $f(x) = y$ .

במילים:  $f$  נקראת על אם לכל ערך  $y$  יש לכל הפחות ערך אחד של  $x$ .

**פונקציה הפיכה**

תהי פונקציה  $f : D \rightarrow E$ .

$g : E \rightarrow D$  נקראת פונקציה הפיכה אם קיימת פונקציה

כך שלכל  $x \in D$  :  $g(f(x)) = x$

ולכל  $y \in E$  :  $f(g(y)) = y$

$g = f^{-1}$  נקראת פונקציה הפוכה ל-  $f$  ומסומנת על-ידי:

**משפט**:  $f$  הפיכה  $\Leftrightarrow f$  חח"ע ועל

## גבולות

### הגדרת הגבול

תהי  $f(x)$  פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה  $x = x_0$ , פרט אולי לנקודה  $x_0$  עצמה. המספר  $L$  נקרא הגבול של  $f(x)$  כאשר  $x$  שואף ל- $x_0$  אם לכל מספר  $\varepsilon > 0$  קיים מספר  $\delta > 0$  כך שלכל  $x$  ששונה מ- $x_0$  ( $x \neq x_0$ ) ושייך לתחום  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$  מתקיים ש- $f(x)$  שייכת לתחום  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ .

### הגדרות הגבול השונות

$$\cdot |f(x) - L| < \varepsilon : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ שלכל } \delta > 0 \text{ קיים } \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\cdot |f(x) - L| < \varepsilon : x > x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים } \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

$$\cdot |f(x) - L| < \varepsilon : x < x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים } \varepsilon > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\cdot f(x) > M : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ שלכל } \delta > 0 \text{ קיים } M > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

$$\cdot f(x) < m : 0 < |x - x_0| < \delta \text{ שלכל } \delta > 0 \text{ קיים } m < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\cdot f(x) > M : x > x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים } M > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\cdot f(x) > M : x < x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים } M > 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

$$\cdot f(x) < m : x > x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים } m < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

$$\cdot f(x) < m : x < x_0 \text{ שלכל } x_0 \text{ קיים } m < 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



## משפט הסנדביץ'

אם בסביבת הנקודה  $x_0$  מתקיים  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  לכל  $x$  השייך לסביבה זו, ואם בנוסף

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ אזי גם } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$$

## גבולות חד-צדדיים

### גבול מימין בנקודה

לפונקציה  $f(x)$  יש גבול  $L_1$  מצד ימין כאשר  $x$  מתקרב ל- $x_0$ ,

אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $x_0 < x < x_0 + \delta$  אזי  $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_1 \text{ במקרה זה נסמן:}$$

### גבול משמאל בנקודה

לפונקציה  $f(x)$  יש גבול  $L_2$  מצד שמאל כאשר  $x$  מתקרב ל- $x_0$ ,

אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $x_0 - \delta < x < x_0$  אזי  $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_2 \text{ במקרה זה נסמן:}$$

## משפט – גבולות חד-צדדיים

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$$

כלומר, הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים זה לזה אם"מ קיים גבול ב- $x_0$

(והגבול הוא אותו הגבול:  $L_1 = L_2 = L$ ).

## אריתמטיקה אריתמטיקה של גבולות

אם הגבולות הבאים קיימים וסופיים:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$  ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$  אזי:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad \text{אם גם } L_2 \neq 0 \text{ אזי:}$$

## היינה – הקשר בין סדרות לפונקציות משפט היינה

ל-  $f$  יש גבול ב-  $x_0$  אם לכל סדרה  $x_n$  ששואפת ל-  $x_0$  ( $x_n \neq x_0$ ) מתקיים:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

### מסקנה – שלילת גבול של פונקציה

אם קיימות שתי סדרות שונות  $x_n$  ,  $\bar{x}_n$  , ששואפות ל-  $x_0$  , אבל  $f(x_n)$  ו-  $f(\bar{x}_n)$  שואפות לגבולות שונים, אזי ל-  $f$  לא קיים גבול ב-  $x_0$  .

## רציפות

### הגדרת הרציפות

תהי  $f$  מוגדרת בנקודה  $x_0$  ובסביבתה.  $f$  נקראת רציפה ב-  $x_0$  אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $\delta > 0$  כך שאם  $|x - x_0| < \delta$  אזי:  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , כלומר מתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

הערה:  $f(x)$  לא מוגדרת ב-  $x_0$  גורר ש-  $f(x)$  לא רציפה ב-  $x_0$ .

### רציפות מימין לנקודה

פונקציה  $f$  המוגדרת מימין ל-  $x_0$  נקראת רציפה מימין ב-  $x_0$  אם:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

### רציפות משמאל לנקודה

פונקציה  $f$  המוגדרת משמאל ל-  $x_0$  נקראת רציפה משמאל ב-  $x_0$  אם:  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

### משפט הרציפות

$f$  רציפה ב-  $x_0 \Leftrightarrow f$  רציפה גם מימין וגם משמאל ב-  $x_0$ .

## מיון נקודות אי-רציפות

תהי  $f(x)$  מוגדרת בסביבה נקובה של  $x_0$ , נאמר כי  $x_0$  היא נקודת אי-רציפות מסוג:

סליקה – אם:

(א) הגבול קיים ב-  $x_0$  :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  (משני הצדדים).

(ב) אבל הגבול שונה מערך הפונקציה בנקודה -  $L \neq f(x_0)$ , או שהפונקציה בכלל לא מוגדרת ב-  $x_0$ .

דוגמא

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0 \quad - \quad \text{הגבול קיים ב- } x_0 = 0 \quad (\text{זהו הגבול המפורסם: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1)$$

אבל  $f$  כלל לא מוגדרת ב-  $x_0 = 0$ .

שימו-לב שנק' אי-רציפות סליקה תמיד ניתנת לתיקון ע"י הגדרה שם, למשל:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

קפיצה

אם שני הגבולות הח"צ:  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+$  ו-  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^-$  קיימים וסופיים, אבל  $L^+ \neq L^-$ .

דוגמא

$$f(x) = [x] \quad \text{בכל מספר שלם } x_0 = k.$$

עיקרית

אם ב-  $x_0$  לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים לא קיים או לא סופי.

דוגמאות

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad - \quad \text{הגבול לא קיים ב- } x_0 = 0.$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad - \quad \text{הגבולות החד-צדדיים אינסופיים סביב } x_0 = 0.$$

## משפטי רציפות יסודיים

### משפט ערך הביניים

תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה בקטע  $[a, b]$ .

אם  $f(a)f(b) < 0$  אזי קיימת נקודה  $x_0 \in (a, b)$  כך ש-  $f(x_0) = 0$ .

### משפט ערך הביניים המוכלל

תהי  $f(x)$  רציפה בקטע סגור  $[a, b]$ . אם  $y_0$  היא נקודת ביניים בין  $f(a)$  ל-  $f(b)$ , כלומר:

$f(a) < y_0 < f(b)$  (או  $f(b) < y_0 < f(a)$ ), אזי קיימת נקודה  $x_0 \in (a, b)$  כך ש-

$$f(x_0) = y_0$$

### משפט ויירשטראס

תהי  $f(x)$  רציפה בקטע סגור  $[a, b]$ , אזי:

(א)  $f(x)$  חסומה בקטע.

(ב)  $f(x)$  מקבלת את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר שלה בקטע (זאת אומרת קיימות

שתי נקודות  $x_1, x_2 \in [a, b]$  כך שלכל  $x \in [a, b]$  :  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ ).

## גזירות

### הגדרת הגזירות

תהי  $f(x)$  מוגדרת בנקודה  $x_0$  ובסביבתה. נקראת **גזירה** בנקודה  $x_0$  אם הגבול הבא קיים

וסופי:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

בהצבת  $h = x - x_0$  מתקבלת הגדרה שקולה לנגזרת:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### משפט – גזירות גוררת רציפות

אם  $f(x)$  גזירה ב-  $x_0$  אזי היא רציפה ב-  $x_0$  (גזירות גוררת רציפות אך לא להיפך!).

### כלל השרשרת

אם  $g(x)$  גזירה בנקודה  $x_0$  ו-  $f(g)$  גזירה ב-  $g(x_0)$  אזי הפונקציה המורכבת  $f(g(x))$

גזירה ב-  $x_0$  ומתקיים כלל השרשרת:

$$\left[ f(g(x)) \right]' \Big|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) g'(x_0)$$

או בצורת הצגה דיפרנציאלית:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dx}$$

## נגזרת של פונקציה הפוכה

תהי  $f$  פונקציה מונוטונית עולה (יורדת) ממש ורציפה ב-  $[a, b]$ . תהי  $f^{-1}$  הפונקציה ההפוכה של  $f$ , אם  $f'$  קיימת ב-  $x_0$ ,  $a < x_0 < b$  ו-  $f'(x_0) \neq 0$  אזי  $f^{-1}$  גזירה ב-  $y_0 = f(x_0)$  ומתקיים:

$$\boxed{[f^{-1}(y_0)]' = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

## נגזרות חד-צדדיות

### נגזרת ימנית

תהי  $f(x)$  מוגדרת בסביבה ימנית של הנקודה  $x_0$ .

$f(x)$  נקראת גזירה מימין ל-  $x_0$  אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)}$$

### נגזרת שמאלית

תהי  $f(x)$  מוגדרת בסביבה שמאלית של הנקודה  $x_0$ .

$f(x)$  נקראת גזירה משמאל ל-  $x_0$  אם הגבול הבא קיים וסופי:

$$\boxed{f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)}$$

## משפט – שיוויון נגזרות חד-צדדיות

פונקציה  $f(x)$  גזירה ב-  $x_0$  אם"מ יש לה נגזרות מימין ומשמאל ב-  $x_0$  והן שוות זו לזו.

$$\boxed{f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)} \quad \text{במקרה זה יתקיים השוויון:}$$

## כללי גזירה

יהיו  $f(x)$  ו-  $g(x)$  פונקציות גזירות בנקודה  $x_0$ , אזי:

$$(1) \text{ נגזרת של סכום: } [f(x) + g(x)]' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(2) \text{ נגזרת של הפרש: } [f(x) - g(x)]' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0) - g'(x_0)$$

$$(3) \text{ נגזרת של מכפלה: } [f(x)g(x)]' \Big|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

(4) נגזרת של הפונקציה ההופכית:

$$\left[ \frac{1}{f(x)} \right]' \Big|_{x=x_0} = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)} \quad \text{אם גם } f(x_0) \neq 0 \text{ אזי:}$$

(4) נגזרת של מנה:

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{אם גם } g(x_0) \neq 0 \text{ אזי:}$$

### נגזרות של פונקציות טריגונומטריות הפוכות

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$[\arctan x]' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$[\operatorname{arccot} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$$



# כלל לופיטל

## משפט לופיטל (ניסוח עבור מקרה "0/0")

תהינה  $f$  ו-  $g$  מוגדרות וגזירות בסביבה מנוקבת של  $x_0$  ומקיימת את התנאים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad (\text{א})$$

$$g'(x) \neq 0 \quad \text{בסביבה.} \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ קיים ושווה ל- } L. \quad (\text{ג})$$

$$\text{אזי גם הגבול } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ קיים ושווה ל- } L.$$

### הערות

$$\text{(א) המשפט לעיל מנוסח עבור המקרה בו } \frac{f}{g} \sim \frac{0}{0} \text{ בסביבת } x_0.$$

$$\text{(ב) המשפט נשאר נכון גם עבור המקרים בהם } \frac{f}{g} \sim \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ (כל האפשרויות בין הסימנים) בסביבת } x_0.$$

$$\text{(ג) המשפט נכון בין אם } x_0 \text{ סופי או } \pm\infty.$$

$$\text{(ד) המשפט נכון גם עבור גבול חד-צדדי.}$$

## משפטים יסודיים

### משפט פרמה

תהי  $f$  מוגדרת בקטע פתוח  $(a, b)$  ותהי  $x_0 \in (a, b)$  אם  $f$  גזירה ב-  $x_0$  ואם היא מקבלת

$$\boxed{f'(x_0) = 0} \text{ בנקודה זו את ערכה הגדול ביותר (או הקטן ביותר) בקטע אזי}$$

### משפט דרבו

אם  $f$  גזירה בקטע סגור  $[a, b]$ , אזי  $f'(x)$  מקבלת לפחות פעם אחת כל ערך ביניים שבין

$$f'_+(a) \text{ ל- } f'_-(b).$$

### משפט רול

תהי  $f$  רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  וגזירה בקטע פתוח  $(a, b)$ .

$$\text{אם בנוסף } f(a) = f(b) \text{ אזי קיימת נקודה } c \in (a, b) \text{ כך ש- } \boxed{f'(c) = 0}.$$

### משפט לגרנז'

תהי  $f$  רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  וגזירה בקטע פתוח  $(a, b)$ , אזי קיימת נקודה  $c \in (a, b)$  כך ש-

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

### משפט קושי (הכללה ללגרנז')

תהיינה  $f(x), g(x)$  רציפות בקטע סגור  $[a, b]$  וגזירות בקטע פתוח  $(a, b)$  ו-  $g'(x) \neq 0$  לכל

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}} \text{ אזי קיימת נקודה } c \in (a, b) \text{ כך ש-}$$

הערה: בהצבת  $g(x) = x$  מתקבל משפט לגרנז'.

# טור טיילור

## משפט נוסחת טיילור

תהי  $f$  פונקציה גזירה  $n+1$  פעמים בסביבת  $x_0$  ותהי  $x$  נקודה כלשהי בסביבה זו.

אזי קיימת נקודה  $c$  בין  $x$  ל-  $x_0$  כך ש-

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)} + R_n(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)}$$

כאשר  $R_n(x)$  נתונה ע"י נוסחת השארית של לגרנז':

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}$$

## מקרה פרטי $n=0$ – משפט לגרנז'

אם ניקח את  $n=0$  בפיתוח:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{T_0(x)} + \underbrace{\frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)}_{R_0(x)}$$

ובהעברת אגפים מתקבל משפט לגרנז':

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

## משפט יחידות הטור

אם לפונקציה יש פיתוח לטור טיילור אזי הוא נקבע ביחידות.

## טור טיילור – מקלורן

טור טיילור מפותח סביב הנקודה  $x_0 = 0$  נקרא טור מקלורן:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

## פיתוחים סטנדרטיים לטור מקלורן

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad D = (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad D = (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad D = (-\infty, \infty)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \quad D = [-1, 1]$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad D = (-1, 1]$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad D = (-1, 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

for any real number  $m$ ,  $D = (-1, 1)$

## זוגיות טור מקלורן

כאשר מפתחים את  $f(x)$  לטור מקלורן,

אם  $f(x)$  פונקציה זוגית, אזי כל המקדמים האי-זוגיים מתאפסים, כלומר תופענה רק חזקות זוגיות.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots$$

דוגמא:

ואם  $f(x)$  פונקציה אי-זוגית, אזי כל המקדמים הזוגיים מתאפסים, כלומר תופענה רק חזקות א"ז.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots$$

דוגמא:

## חקירת פונקציה

### נקודות קיצון מקומיות

#### נקודת מקסימום מקומית

תהי  $f(x)$  מוגדרת בנקודה  $x_0$  ובסביבתה.  $x_0$  נקראת נקודת מקסימום מקומית של  $f(x)$  אם קיימת סביבה של  $x_0$  כך ש-  $f(x) \leq f(x_0)$  לכל  $x$  השייך לסביבה.

#### נקודת מינימום מקומית

תהי  $f(x)$  מוגדרת בנקודה  $x_0$  ובסביבתה.  $x_0$  נקראת נקודת מינימום מקומית של  $f(x)$  אם קיימת סביבה של  $x_0$  כך ש-  $f(x) \geq f(x_0)$  לכל  $x$  השייך לסביבה.

### משפט – התאפסות הנגזרת בנקודת קיצון מקומית

אם נקודה  $x_0$  היא נקודת קיצון מקומית (מקס' או מינ') ו-  $f(x)$  גזירה ב-  $x_0$  אזי:  $f'(x_0) = 0$ .  
 הערה: אם  $f'(x_0) = 0$  לא ניתן להסיק על נקודת קיצון (כלומר המשפט ההפוך לא בהכרח נכון).

### נקודת קיצון גלובלית

#### נקודת מקסימום גלובלית

תהי  $f(x)$  פונקציה בקטע מסוים.  $x_0$  נקראת נקודת מקסימום גלובלית של  $f(x)$  אם לכל  $x$  בקטע מתקיים:  $f(x) \leq f(x_0)$ . כלומר  $f(x_0)$  הוא הערך הגדול ביותר של הפונקציה בקטע.

#### נקודת מינימום גלובלית

תהי  $f(x)$  פונקציה בקטע מסוים.  $x_0$  נקראת נקודת מינימום גלובלית של  $f(x)$  אם לכל  $x$  בקטע מתקיים:  $f(x) \geq f(x_0)$ . כלומר  $f(x_0)$  הוא הערך הקטן ביותר של הפונקציה בקטע.

## תנאים לנקודת קיצון

### נקודה חשודה לקיצון (מקסימום או מינימום מקומי)

נאמר שנקודה  $x_0$  חשודה לקיצון אם מתקיים אחד משני התנאים הבאים:

$$f'(x_0) = 0 \quad (\text{א})$$

(ב)  $f(x)$  מוגדרת ב-  $x_0$  אבל  $f'(x_0)$  לא קיימת

למשל:  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ , אזי  $x_0 = 0$  חשודה לקיצון לפי ב'.

### משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת הראשונה

תהי  $f(x)$  רציפה בנקודה  $x_0$  וגזירה בסביבת  $x_0$  פרט אולי ב-  $x_0$  עצמה. אזי:

(א) אם  $f'(x) > 0$  לכל  $x < x_0$  ו-  $f'(x) < 0$  לכל  $x > x_0$  אזי  $x_0$  נקודת מקסימום מקומית.

(ב) אם  $f'(x) < 0$  לכל  $x < x_0$  ו-  $f'(x) > 0$  לכל  $x > x_0$  אזי  $x_0$  נקודת מינימום מקומית.

(ג) אם  $f'(x)$  שומרת סימן ב-  $x_0$  אזי  $x_0$  לא נקודת קיצון מקומית של  $f(x)$ .

### משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת השנייה

תהי  $f(x)$  גזירה פעמיים בנקודה  $x_0$  וגם  $f'(x_0) = 0$ , אזי:

(א) אם  $f''(x_0) < 0$  אזי ב-  $x_0$  יש מקסימום מקומי.

(ב) אם  $f''(x_0) > 0$  אזי ב-  $x_0$  יש מינימום מקומי.

### משפט תנאי מספיק לקיצון – מבחן הנגזרת ה- n

תהי  $f(x)$  בעלת נגזרות רציפות עד סדר  $n$  בנקודה  $x_0$ .

אם:  $f^{(n-1)}(x_0) = \dots = f''(x_0) = f'(x_0) = 0$  אבל  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  ו-  $n$  זוגי אזי יש קיצון.

אם  $f^{(n)}(x_0) < 0$  יש מקסימום ואם  $f^{(n)}(x_0) > 0$  יש מינימום.

אם  $n$  אי-זוגי אזי אין קיצון. אם  $n = 2$  מתקבל המשפט הקודם כמקרה פרטי.

## תחומי קמירות וקעירות

### קמירות

הפונקציה  $f(x)$  נקראת **קמורה בנקודה**  $x_0$  אם קיימת סביבה של  $x_0$  כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מעל המשיק ב-  $x_0$ , כלומר קיים  $\delta > 0$  כך שלכל  $0 < |x - x_0| < \delta$  מתקיים:

$$f(x) > f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$  נקראת קמורה בקטע כלשהו אם היא קמורה בכל נקודה בקטע.

### קעירות

הפונקציה  $f(x)$  נקראת **קעורה בנקודה**  $x_0$  אם קיימת סביבה של  $x_0$  כך שבסביבה זו גרף הפונקציה נמצא מתחת למשיק ב-  $x_0$ , כלומר קיים  $\delta > 0$  כך שלכל  $0 < |x - x_0| < \delta$  מתקיים:

$$f(x) < f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$f(x)$  נקראת קעורה בקטע כלשהו אם היא קעורה בכל נקודה בקטע.

## מבחן הנגזרת השנייה לקמירות וקעירות

תהי  $f(x)$  פונקציה גזירה פעמיים ב-  $(a, b)$  אזי:

(א) אם  $f''(x) > 0$  לכל  $x \in (a, b)$  אזי  $f(x)$  קמורה ב-  $(a, b)$ .

(ב) אם  $f''(x) < 0$  לכל  $x \in (a, b)$  אזי  $f(x)$  קעורה ב-  $(a, b)$ .

## נקודת פיתול

תהי  $f(x)$  מוגדרת בסביבה מנוקבת של הנקודה  $x_0$ . נאמר ש-  $x_0$  היא נקודת פיתול של  $f(x)$  אם יש בנקודה מעבר בין תחום קמירות של הפונקציה לתחום קעירות שלה.

**הערה:** אם  $f(x)$  גזירה פעמיים ו-  $f''(x)$  משנה סימן ב-  $x_0$  אזי  $x_0$  היא נקודת פיתול של  $f(x)$  ובהכרח  $f''(x_0) = 0$ . אך ההגדרה המקורית הינה גיאומטרית, כלומר  $f(x)$  לא חייבת להיות מוגדרת או רציפה או גזירה בנקודה!



## אסימפטוטות

### הגדרה – אסימפטוטה משופעת

אם  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax - b) = 0$  אזי הישר  $y = ax + b$  נקרא אסימפטוטה של  $f$  ב-  $\infty$ .

אם  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax - b) = 0$  אזי הישר  $y = ax + b$  נקרא אסימפטוטה של  $f$  ב-  $-\infty$ .

הערה: בפרט אם  $a = 0$  מתקבלת אסימפטוטה אופקית (מקבילה לציר ה-  $x$ ).

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \quad \text{נוסחאות לחישוב הישר:}$$

אם הגבולות לעיל קיימים אזי הישר  $y = ax + b$  הינו אסימפטוטה של  $f$  ב-  $\infty$  (אם אחד מהם אינסופי או לא קיים אזי האסימפטוטה לא קיימת)

### הגדרה – אסימפטוטה אנכית

אם  $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = \infty$  נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה  $(a, 0)$  אסימפטוטה אנכית מימין של  $f$  ב-  $a$ .

אם  $\lim_{x \rightarrow a^-} |f(x)| = \infty$  נקרא לישר האנכי העובר דרך הנקודה  $(a, 0)$  אסימפטוטה אנכית משמאל של  $f$  ב-  $a$ .

ל-  $f$  יש אסימפטוטה אנכית ב-  $x = a$  אם  $f$  לא מוגדרת ב-  $a$  ולפחות אחד משני הגבולות הבאים

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

הוא אינסופי:

## סדרות

### הגדרות יסוד בסדרות

#### סדרה

אוסף אינסופי מסודר של מספרים ממשיים נקרא סדרה. סימון:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , או בקצרה:  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

#### גבול של סדרה

נאמר שהמספר  $L$  הוא גבול הסדרה, אם לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$  מתקיים:  $|a_n - L| < \varepsilon$ .  
 סימון:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  או בקצרה:  $a_n \rightarrow L$ .

#### הגדרה שקולה

$L$  הוא גבול הסדרה אם לכל  $\varepsilon > 0$  הקטע הפתוח  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  מכיל כמעט את כל איברי הסדרה.

#### שלילת הגדרת הגבול

$L$  הוא לא הגבול של הסדרה, אם קיים  $\varepsilon > 0$  כך שלכל  $n_0$  קיים  $n > n_0$  כך שמתקיים:  $|a_n - L| \geq \varepsilon$ .

#### שלילת הגדרת הגבול השקולה

$L$  הוא לא הגבול של הסדרה, אם קיים  $\varepsilon > 0$ , כך שיש אינסוף איברים מחוץ לקטע  $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ .

כלל אצבע לשלילה: לכל  $\leftrightarrow$  קיים.

#### גבול אינסופי

נאמר כי סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  שואפת לאינסוף, אם לכל מספר  $M$  קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$ :  $a_n > M$ .

סימון:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , או בקצרה:  $a_n \rightarrow \infty$ .

נאמר כי סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  שואפת למינוס אינסוף, אם לכל מספר  $m$  קיים  $n_0$  כך שלכל  $n > n_0$ :  $a_n < m$ .

סימון:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , או בקצרה:  $a_n \rightarrow -\infty$ .

#### הגדרות שקולות

סדרה  $a_n$  שואפת ל- $\infty$  אם יש איזשהו מספר  $M$ , כך שכמעט כל איברי הסדרה גדולים ממנו.  
 סדרה  $a_n$  שואפת ל- $-\infty$  אם יש איזשהו מספר  $m$ , כך שכמעט כל איברי הסדרה קטנים ממנו.

## מבוא לתורת הקבוצות

### קבוצה חסומה

תהי  $A$  קבוצה של מספרים ממשיים ( $A \in \mathbb{R}$ ). יהי  $x$  איבר ב- $A$  ( $x \in A$ ), אזי:  
 $A$  חסומה מלמעלה אם קיים  $M$  כך שלכל  $x \in A$ :  $x \leq M$ .  
 $A$  חסומה מלטה אם קיים  $m$  כך שלכל  $x \in A$ :  $x \geq m$ .  
 $A$  חסומה אם קיים  $K$  כך שלכל  $x \in A$ :  $|x| \leq K$ .  
 או באופן שקול:  $A$  חסומה אם היא חסומה מלמעלה ומלטה.

### סופרמום ואינפימום

תהי  $A \in \mathbb{R}$ , אזי:  
 $S$  נקרא סופרמום של  $A$  אם הוא החסם מלמעלה הכי קטן של  $A$  (הדוק מלמעלה). סימון:  $\sup A$ .  
 $I$  נקרא אינפימום של  $A$  אם הוא החסם מלטה הכי גדול של  $A$  (הדוק מלטה). סימון:  $\inf A$ .

### מקסימום ומינימום

תהי  $A \in \mathbb{R}$  ויהיו  $S = \sup A$ ,  $I = \inf A$ , אזי:  
 אם  $S \in A$  אזי הוא נקרא המקסימום של  $A$ . סימון:  $\max A$ .  
 אם  $I \in A$  אזי הוא נקרא המינימום של  $A$ . סימון:  $\min A$ .

### אקסיומת השלמות

לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלמעלה – קיים סופרמום.  
 ( $\Leftrightarrow$ ) לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים החסומה מלטה – קיים אינפימום)

### משפט הסופרמום

$S = \sup A$  אם ורק אם:

(א) לכל  $x \in A$ ,  $x \leq S$ .

(ב) לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $x_0 \in A$  כך ש- $x_0 > S - \varepsilon$ .

## סדרות רקורסיביות

### סדרה רקורסיבית

סדרה שבה כל איבר מוגדר על-ידי האיברים שקודמים לו.  
הנוסחה המתקבלת נקראת נוסחת נסיגה וביחד עם תנאי ההתחלה, מוגדרת הסדרה כולה.

### שלבי האינדוקציה

כדי להוכיח טענה באמצעות אינדוקציה, עובדים לפי השלבים הבאים:

(א) בדיקה: בודקים שהטענה נכונה עבור  $n = 1$ .

(ב) הנחת האינדוקציה: מניחים שהטענה נכונה עבור  $n$  מסוים.

(ג) הוכחה: מוכיחים שהטענה נכונה עבור  $n + 1$ .

## תתי-סדרות

### תת-סדרה

סדרה המתקבלת מ-  $a_n$  על-ידי השמטת חלק מאיבריה. סימון:  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ .

### גבול חלקי

גבול של תת-סדרה.

## קריטריון קושי

### סדרת קושי

סדרה המקיימת את קריטריון קושי.

## משפטי יסוד בסדרות

### משפט קיום יחידות

אם לסדרה קיים גבול אזי הוא יחיד.

### משפט התכנסות גוררת חסימות

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

### משפט חסומה כפול אפיסה

אם  $a_n \rightarrow 0$  והסדרה  $b_n$  חסומה אזי  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

## אריתמטיקה של סדרות

אם  $a_n, b_n$  שתי סדרות מתכנסות, אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\text{ב})$$

$$b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \quad \text{כאשר לכל } n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\text{ג})$$

## הרחבת האריתמטיקה

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \quad \text{אם } a_n \rightarrow \infty \text{ ו- } b_n > m \text{ (חסומה מלמטה), אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty \quad \text{אם } a_n \rightarrow \infty \text{ ו- } b_n > m > 0, \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \infty \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \quad \text{אם } |a_n| \rightarrow \infty, \text{ אזי } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \rightarrow 0 \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \quad \text{אם } a_n \rightarrow 0 \text{ וגם } a_n > 0 \text{ לכל } n, \text{ אזי: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \rightarrow \infty \quad (\text{ii})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty \quad \text{אם } a_n \rightarrow 0 \text{ וגם } a_n < 0 \text{ לכל } n, \text{ אזי: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \rightarrow -\infty$$

## אי-שיויונות בין סדרות

### משפט

אם:  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  שתי סדרות מתכנסות, אזי:

(א) אם  $a < b$  אזי  $a_n < b_n$  החל ממקום מסוים.

(ב) אם החל ממקום מסוים  $a_n \leq b_n$  אזי  $a \leq b$ .

### מסקנה

תהי סדרה מתכנסת  $a_n \rightarrow L$  ומספר  $b$ . אם החל ממקום מסוים  $a_n \geq b$  אזי  $L \geq b$  (בפרט אם  $a_n \geq 0$  אזי  $L \geq 0$ ).

### משפט הסנדביץ'

אם  $a_n \rightarrow L$ ,  $c_n \rightarrow L$  והחל מ- $n$  מסוים  $a_n \leq b_n \leq c_n$ , אזי גם  $b_n \rightarrow L$ .

### משפט הפיצה

אם  $a_n \rightarrow \infty$  והחל מ- $n$  מסוים  $a_n \leq b_n$ , אזי גם  $b_n \rightarrow \infty$ .

אם  $b_n \rightarrow -\infty$  והחל מ- $n$  מסוים  $a_n \leq b_n$ , אזי גם  $a_n \rightarrow -\infty$ .

### משפט אי-שיויון הממוצעים

יהיו  $n$  מספרים ממשיים וחיוביים  $a_1, a_2, \dots, a_n$ : אזי:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

או במילים: ממוצע חשבוני  $\leq$  ממוצע הנדסי  $\leq$  ממוצע הרמוני

כאשר שיוויון מתקבל אם ורק אם  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**משפט צ'זארן**

תהי  $a_n$  סדרה מתכנסת ויהי  $S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$  הממוצע החשבוני שלה,

הממוצע ההרמוני שלה,  $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$

ו-  $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$  הממוצע ההנדסי שלה, אזי:

- (א) אם  $a_n \rightarrow L$  אזי גם  $S_n \rightarrow L$ .
- (ב) אם  $a_n \rightarrow L$  אזי גם  $H_n \rightarrow L$ , כאשר  $L \neq 0$ , לכל  $n$ .
- (ג) אם  $a_n \rightarrow L$  אזי גם  $G_n \rightarrow L$ , כאשר  $a_n > 0$  לכל  $n$ .

**מנה ושורש של סדרה**

**משפט מקשר בין מנה לשורש (משפט "ומשה")**

תהי  $a_n$  סדרה חיובית. אם  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$  אזי גם  $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$

**מסקנות**

- (א)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$  לכל קבוע חיובי  $c$ .
- (ב)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .
- (ג)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1$  לכל פולינום חיובי  $P(n)$ .
- (ד)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$  לכל סדרה חיובית וחסומה כך ש-  $0 < m \leq a_n \leq M$ .

**מבחן המנה**

תהי  $a_n$  סדרה חיובית. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$  אזי:

(א) אם  $L < 1$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(ב) אם  $L > 1$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

(ג) אם  $L = 1$  אזי לא ניתן לדעת דבר על התכנסות/התבדרות הסדרה.

**מבחן השורש**

תהי  $a_n$  סדרה חיובית. אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$  אזי:

(א) אם  $L < 1$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(ב) אם  $L > 1$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

(ג) אם  $L = 1$  אזי לא ניתן לדעת דבר על התכנסות/התבדרות הסדרה.

**מונוטוניות וחסיונות**

**משפט – מונוטוניות וחסיונות**

כל סדרה מונוטונית וחסומה מתכנסת.  
 כל סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה – מתכנסת לסופרמום שלה.  
 כל סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלטה – מתכנסת לאינפימום שלה.

**משפט – מונוטוניות ואי-חסיונות**

כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.  
 כל סדרה מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה – מתבדרת ל- $+\infty$ .  
 כל סדרה מונוטונית יורדת ולא חסומה מלטה – מתבדרת ל- $-\infty$ .



## משפטי יסוד בתתי-סדרות

### משפט – הלמה של קנטור

תהינה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  שתי סדרות. אם:

$$(א) \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

$$(ב) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

אזי שתיהן מתכנסות לאותו הגבול.

### משפט – הלמה של קנטור – ניסוח גיאומטרי

תהי  $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$  סדרת קטעים סגורים. אם:

$$(א) \quad \text{כל קטע מכיל את הבא אחריו: } [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \text{ לכל } n \text{ טבעי.}$$

$$(ב) \quad \text{אורכי הקטעים שואפים לאפס: } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

אזי קיימת נקודה יחידה  $c$  המשותפת לכל הקטעים, כך שלכל  $n$  טבעי  $c \in [a_n, b_n]$ .

### משפט

אם סדרה מתכנסת אזי כל תת-סדרה שלה גם מתכנסת – ולאותו הגבול.

### משפט

אם לסדרה קיימות שתי תתי-סדרות עם גבולות שונים, אזי לסדרה אין גבול.

### משפט הירושה

תהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרה ו-  $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$  תת-סדרה שלה, אזי:

(א) אם  $a_n$  מתכנסת אזי גם  $a_{n_k}$  מתכנסת – ולאותו הגבול.

(ב) אם  $a_n$  חסומה (מלמעלה/מלמטה/שניהם) אזי גם  $a_{n_k}$  חסומה.

(ג) אם  $a_n$  מונוטונית (עולה/יורדת/ממש) אזי גם  $a_{n_k}$  מונוטונית.

**משפט בולצאנו-ויירשטראס (B-W)**

- (א) לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.  
 (ב) לכל סדרה לא חסומה מלמעלה יש תת-סדרה המתבדרת ל- $+\infty$ .  
 (ג) לכל סדרה לא חסומה מלמטה יש תת-סדרה המתבדרת ל- $-\infty$ .

**משפט בולצאנו-ויירשטראס (B-W) המלא**

לכל סדרה יש תת-סדרה המתכנסת במובן הרחב.

**משפט**

לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

**משפט**

סדרה מתכנסת אמ"מ יש לה גבול חלקי יחיד.

**קריטריון קושי**

סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת אמ"מ לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $n_0$ , כך שלכל  $m, n > n_0$   $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

**ניסוח שקול**

סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  מתכנסת אמ"מ לכל  $\varepsilon > 0$  קיים  $n_0$ , כך שלכל  $n > n_0$  ולכל  $p \in \mathbb{N}$   $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ .

**משפט** – סדרה מתכנסת אמ"מ היא סדרת קושי.

## הגבול המפורסם $e$ בסדרות

**משפט**

תהי הסדרה:  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . אזי  $a_n$  מתכנסת ואת גבולה מסמנים באות  $e$  (כך ש-  $e \approx 2.71$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**משפט**

תהי  $a_n \rightarrow \infty$ ,  $0 \neq a_n$ : אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

**משפט**

אם  $a_n \rightarrow \infty$ ,  $0 \neq a_n$  ו-  $b_n \rightarrow L$  (סופי או אינסופי), אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n b_n} = e^L$$

## הגבול המפורסם סינוס בסדרות

**הסבר אינטואיטיבי**

עבור זוויות מאוד קטנות (" $\alpha \ll 1$ ") מתקיים:  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

כל ש-  $\alpha$  יותר קטנה, כך הקירוב נהיה יותר מדויק:  $\frac{\sin \alpha}{\alpha} \approx \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ .

בגבול בו  $\alpha \rightarrow 0$  מתקבל "הגבול המפורסם":  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ .

כעת, אם ניקח למשל את הסדרה ההרמונית:  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ , אזי כאשר  $n \rightarrow \infty$  מתקיים ש-  $\alpha_n \rightarrow 0$ .

ומתקבלת צורה נוספת לגבול המפורסם עבור סדרות:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$ .

באופן כללי יותר אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ : אזי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$$

# האינטגרל הלא מסוים

## משפטי אינטגרביליות

### משפט – תנאי הכרחי לאינטגרביליות

אם  $f(x)$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  אזי היא חסומה ב-  $[a, b]$ .

### משפט

אם  $f(x)$  רציפה בקטע סגור  $[a, b]$  אזי  $f(x)$  אינטגרבילית.

### הכללה של המשפט

אם  $f(x)$  חסומה ב-  $[a, b]$  ויש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות (סליקות או קפיצה) ב-  $[a, b]$  אזי  $f(x)$  אינטגרבילית.

### משפט

אם  $f(x)$  חסומה ב-  $[a, b]$  ומונטונית אזי  $f(x)$  אינטגרבילית.

### משפט

אם  $f(x)$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  ו-  $f(x) \geq 0$  אזי גם  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

**משפט**

תהי  $f(x)$  רציפה ב-  $[a, b]$  ו-  $f(x) \geq 0$  לכל  $x \in [a, b]$ .

אם  $f(x)$  לא שווה לאפס באופן זהותי, אזי:  $\int_a^b f(x) dx > 0$

ז"א שיש לפחות נקודה אחת שבה הפונקציה חיובית.

**משפט**

אם  $f$  אינטגרבילית ב-  $[a, b]$  אזי גם  $|f|$  אינטגרבילית בקטע ומתקיים:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

**משפט**

תהי  $f(x)$  אינטגרבילית ב-  $[a, b]$  ונסמן:  $m = \inf_{[a,b]} f(x)$ ,  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ , אזי:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

**משפט הערך הממוצע האינטגרלי**

אם  $f(x)$  רציפה ב-  $[a, b]$ , אזי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  כך ש-  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$

## האינטגרל המסוים

### משפט

תהי פונקציה  $f(x)$  אינטגרבילית ב-  $[a, b]$  אזי הפונקציה  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  רציפה ב-  $[a, b]$ .

### המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

תהי  $f(x)$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  ורציפה בנקודה  $x_0 \in [a, b]$ , אזי  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

$$F'(x_0) = f(x_0) \quad \text{גזירה ב- } x_0 \text{ ומתקיים:}$$

הערות: (1) במילים אחרות  $F$  היא הפונקציה הקדומה של  $f$ .

(2) אם  $x_0$  נקודת קצה של הקטע, אזי הנגזרת היא חד-צדדית.

### נוסחת ניוטון-לייבניץ

תהי  $f(x)$  רציפה ב-  $[a, b]$  ותהי  $F(x)$  פונקציה קדומה שלה אזי:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

### הכלל לכלל לייבניץ

תהי  $f(x)$  רציפה ותהינה  $u(x), v(x)$  פונקציות גזירות.

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \quad \text{אם:}$$

$$F'(x) = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x) \quad \text{אזי:}$$

# אינטגרלים מוכללים

## מבחני השוואה

### מבחן ההשוואה הראשון

אם  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  לכל  $x \geq a$  (מספר קבוע כלשהו) אזי:

(א) ההתכנסות של  $\int_a^\infty g(x) dx$  גוררת את ההתכנסות של  $\int_a^\infty f(x) dx$ .

(ב) ההתבדרות של  $\int_a^\infty f(x) dx$  גוררת את ההתבדרות של  $\int_a^\infty g(x) dx$ .

### מבחן ההשוואה השני (גבולי)

אם  $f(x), g(x)$  חיוביות בקטע  $x \geq a$  ו-  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ ,  $0 < L < \infty$  אזי:

שני האינטגרלים  $\int_a^\infty f(x) dx$ ,  $\int_a^\infty g(x) dx$  מתכנסים ביחד או מתבדרים ביחד.

## התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

### התכנסות בהחלט – הגדרה

תהי  $a$  נקודה קבועה ונניח ש-  $f(x)$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  לכל  $a < b$ .

אם האינטגרל המוכלל  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  מתכנס, אזי נאמר שהאינטגרל  $\int_a^\infty f(x) dx$  מתכנס בהחלט.

### התכנסות בתנאי – הגדרה

תהי  $a$  נקודה קבועה ונניח ש-  $f(x)$  אינטגרבילית בקטע  $[a, b]$  לכל  $a < b$ .

אם האינטגרל המוכלל  $\int_a^\infty |f(x)| dx$  לא מתכנס אך האינטגרל  $\int_a^\infty f(x) dx$  מתכנס,

אזי נאמר שהאינטגרל  $\int_a^\infty f(x) dx$  מתכנס בתנאי.

## משפט – התכנסות מוחלטת גוררת התכנסות

אינטגרל מתכנס בהחלט  $\leftarrow$  מתכנס.



## אינטגרלים מוכללים נפוצים

### אינטגרלים מהסוג הראשון

$$(1) \text{ האינטגרל } \int_0^{b>0} \frac{dx}{x^p} \text{ מתכנס עבור } p < 1 \text{ ומתבדר עבור } p \geq 1.$$

$$(2) \text{ האינטגרל } \int_0^{0<b<1} \frac{dx}{x^p |\ln x|^q} \text{ מתכנס עבור } \begin{cases} p < 1 \\ q \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ או עבור } \begin{cases} p = 1 \\ q > 1 \end{cases} \text{ ומתבדר לכל מקרה אחר.}$$

$$(3) \text{ האינטגרל } \int_0^{b>0} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ מתכנס עבור } p < 2 \text{ ומתבדר עבור } p \geq 2 \text{ (נשווה עם } \frac{x}{x^p} \text{)}$$

### אינטגרלים מהסוג השני

$$(1) \text{ האינטגרל } \int_{a>0}^{\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ מתכנס עבור } p > 1 \text{ ומתבדר עבור } p \leq 1.$$

$$(2) \text{ האינטגרל } \int_{a>1}^{\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q} \text{ מתכנס עבור } \begin{cases} p > 1 \\ q \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ או עבור } \begin{cases} p = 1 \\ q > 1 \end{cases} \text{ ומתבדר לכל מקרה אחר.}$$

$$(3) \text{ האינטגרל } \int_{a>0}^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס) עבור } p > 1, \text{ מתכנס בתנאי עבור}$$

$0 < p \leq 1$  (התכנסות לפי אינטגרציה בחלקים והתבדרות הערך המוחלט לפי:

$$p \leq 0 \text{ ומתבדר עבור } \left. \left( \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x^p} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x^p} - \frac{\cos(2x)}{x^p} \right) \right)_{0 < p \leq 1}$$

$$(4) \text{ האינטגרל } \int_{a>0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx \text{ מתכנס בהחלט (ולכן מתכנס) עבור } p > 1 \text{ ומתבדר עבור } p \leq 1.$$

## שלבי עבודה עם אינטגרלים מוכללים

(1) זיהוי הנקודות הסינגולריות (נקודות בהן האינטגרנד מתפוצץ.  $\infty$  תמיד "נקודה" סינגולרית).

(2) אם ניתן, נביא את האינטגרל לאינטגרל ידוע  $\int \frac{1}{x^p} dx$  (על-ידי הצבה למשל) וסיימנו.

אחרת, נזהה איך הפונקציה מתנהגת בסביבת הנקודה הסינגולרית (זיהוי האיבר

הדומיננטי בסביבת הנקודה, שימוש בטור טיילור, שימוש באי-שוויונות מוכרים).

הפונקציה שנקבל היא זאת שאיתה נרצה להשוות את הפונקציה שבאינטגרנד.

(3) אם שתי הפונקציות חיוביות, נשתמש באחד ממבחני השוואה, הראשון או השני.

אחרת, נבדוק האם האינטגרל מתכנס בהחלט (כאשר התכנסות מוחלטת גוררת התכנסות).

אחרת (כלומר, אם גם זה כשל), ננסה ממש לפתור את האינטגרל (על-ידי אינטגרציה

בחלקים למשל ובדיקת התכנסות/התבדרות של כל חלק בנפרד).